UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE MATEMÁTICA

BACHARELADO EM ESTATÍSTICA

MAXIMIZAÇÃO DOS LUCROS: EM BUSCA DO PREÇO ÓTIMO

GABRIELA MARIA ROCHA BOLAINA

Uberlândia-MG

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE MATEMÁTICA

BACHARELADO EM ESTATÍSTICA

MAXIMIZAÇÃO DOS LUCROS: EM BUSCA DO PREÇO ÓTIMO

GABRIELA MARIA ROCHA BOLAINA

Orientador: Prof. Dr. Lúcio Borges Araújo

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Estatística da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) como parte dos requisitos para a conclusão do Curso de Bacharelado em Estatística.

Uberlândia-MG

2017

GABRIELA MARIA ROCHA BOLAINA

Monografia defendida em 15 de Dezembro de 2017 e aprovada pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Dr. Lúcio Borges de Araujo (ORIENTADOR)
Faculdade de Matemática – UFU

Edson Agustini

Prof. Dr. Edson Agustini
Faculdade de Matemática – UFU

Leandro Alves Pereira

Prof. Dr. Leandro Alves Pereira
Faculdade de Matemática – UFU

RESUMO

O constante surgimento de novas empresas faz com que o mercado esteja cada vez mais competitivo, visto isso, são necessárias diversas técnicas para manter a sustentabilidade da empresa. Um exemplo disso, são as técnicas de precificação, que buscam melhorar os lucros da empresa. Em vista disso, o objetivo deste trabalho é analisar dados históricos de vendas (preço e quantidade vendida), criar uma função que os associe com o lucro e encontrar o preço que maximiza os ganhos da empresa.

Palavras Chaves: Regressão linear, maximização, método simplex, preço ótimo

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A precificação correta dos produtos nas empresas é uma estratégia competitiva de grande relevância. Tal importância deve-se, principalmente, à imposição do mercado (concorrência e disponibilidade financeira do consumidor). Devido ao fato de o atual ambiente caracterizado pela alta competitividade e constante mudança tecnológica as interações das empresas devem ser coordenadas e integradas, para a continuidade a longo prazo, a qual depende de resultados econômicos, como explicado por Santos (1997).

A precificação estratégica é fundamental para maximização dos lucros, reconhecer a importância de se ter boas estratégias e entender que a ela deve representar os objetivos da organização podem refletir sobre a forma como as empresas se estruturam. Melhorar tal método proporciona conhecimento minucioso do negócio e torna a administração mais eficaz.

Como o maior objetivo de qualquer negócio é o lucro. Para que isso aconteça de forma precisa e correta é necessário precificar estrategicamente e assim obter a maior remuneração possível sobre o capital investido, ou seja, maximizar o lucro.

Através da otimização do lucro, por meio da busca do preço ideal, a empresa pode: obter fluxo de lucros a longo prazo e garantir um retorno satisfatório sobre os capitais investidos no negócio, como dito em Santos (1997).

O processo de decisão sobre o preço envolve a coleta de dados históricos da empresa, para a investigação da relação entre preço de venda e quantidade vendida. O que, no fim do estudo, servirá como instrumento de gestão.

O modelo que será apresentado é uma nova visão sobre o preço-alvo (target price). Para tal considera-se o custo da mercadoria vendida (CMV), a competitividade (com base em pesquisas de mercado) e o lucro esperado (Margem bruta).

O principal objetivo deste trabalho é ajustar um modelo que relacione a quantidade vendida com o preço de venda do produto (preço-alvo), a fim de encontrar, com base no modelo ajustado, uma função para cada produto que mostre o lucro, para enfim, maximiza-la.

Espera-se que o uso da regressão linear simples seja suficiente para ajustar o modelo: quantidade versus preço, desta forma, entende-se o coeficiente angular como a elasticidade-preço da demanda. Tal coeficiente é muito importante em áreas administrativas e de contabilidade.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 REGRESSÃO LINEAR SIMPLES

Considerando-se duas variáveis *X* e *Y*, dados n pares (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ...(X_n, Y_n), se *Y* é função linear de *X*, pode-se estabelecer uma regressão linear simples cujo modelo estatístico é

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \qquad \text{para } i = 1, \dots, n \qquad (1)$$

em que:

Y_i é uma variável aleatória e representa o valor da variável resposta (variável dependente) na i-ésima observação;

X_i representa o valor da variável explicativa (variável independente, variável regressora) na i-ésima observação;

ε_i é uma variável aleatória que representa o erro experimental;

β_0 e $\beta_1$são os parâmetros do modelo, que serão estimados, e que definem a reta de regressão e;

n é o tamanho da amostra.

O parâmetro β_0 é chamado intercepto ou coeficiente linear e representa o ponto em que a reta regressora corta o eixo dos *y*'s, quando $x = 0$. Já o parâmetro β_1 representa a inclinação da reta regressora sendo chamado de coeficiente de regressão ou coeficiente angular. Além disso, temos que para um aumento de uma unidade na variável *X*, o valor $E(Y \mid X)$ aumenta β_1 unidades.

Ao estabelecer o modelo (1) para os dados, pressupomos que:

i) A relação matemática entre *Y* e *X* é linear;

ii) Os valores de *X* são fixos (ou controlados), isto é, *X* não é uma variável aleatória;

iii) A média do erro é nula, ou seja, $E(\varepsilon_i) = 0$. Desta forma, segue que

$$E(Y_i) = E(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

e portanto, o valor esperado para o modelo (1) é dada por:

$$E[Y|X] = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

Nota-se que o valor observado de Y_i está em torno do valor da função de regressão com erro experimental ε_i;

iv) Para um dado valor de *x*, a variância de ε_i é sempre σ^2, isto é,

$$Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$$

isto implica em:

$$Var(Y_i) = E[\,Y_i - E(Y_i|x_i)]^2 = E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$$

Neste caso, dizemos que o erro é homocedástico (tem variância constante);

v) O erro de uma observação é não correlacionado com o erro de outra observação, isto é,

$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \qquad \text{para } i \neq j$$

Esta hipótese não implica que os erros sejam independentes. Se a distribuição dos erros for normal, esta hipótese é equivalente a independência dos erros (Montgomery et al, 1992);

vi) Os erros tem distribuição Normal.

Desta forma, combinando (iii), (iv) e (vi) temos que $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Como Y_i é a soma de um termo constante, $\beta_0 + \beta_1 X_i$, com um termo aleatório, ε_i, segue que $Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i\,;\, \sigma^2)$. Além disso, por (v) e (vi) temos que Y_i e Y_j são independentes. A suposição de normalidade é necessária para a elaboração dos testes de hipóteses e obtenção de intervalos de confiança. Tais conceitos foram discutidos por Freire (1999).

Visto tais exigências, serão feitos testes de Normalidade (Shapiro Wilk), Homogeneidade (Breusch-Godfrey) e independência (Durbin-Watson), para avaliar a qualidade do modelo.

Uma maneira de avaliar a qualidade do modelo é por meio do coeficiente de determinação (R^2), o qual é uma medida de ajustamento do modelo aos dados. Quanto maior, mais explicativo é o modelo, ou seja, mais ele se ajusta a amostra. (Azevedo, 1997)

Azevedo (1997) também apresenta uma estimativa dos parâmetros do modelo de regressão linear simples por meio do método dos mínimos quadrados e do coeficiente de determinação (R^2):

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - n\bar{x}\,\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\,\bar{x}^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{Y})^2}$$

2.2 MAXIMIZAÇÃO

O método simplex é uma técnica utilizada para se determinar, numericamente, a solução ótima de um modelo de programação linear (Bertsimas, 1997).

Os problemas de Programação Linear (PL) buscam a distribuição eficiente de recursos limitados para atender um determinado objetivo, em geral, maximizar lucros ou minimizar custos. Em se tratando de PL, esse objetivo é expresso através de uma função linear, denominada de "Função Objetivo". É necessário também que se defina quais as atividades que consomem recursos e em que proporções os mesmos são consumidos. Essas informações são apresentadas em forma de equações as inequações lineares, uma para cada recurso. Ao conjunto dessas equações e/ou inequações, denomina-se "Restrições do Modelo". Definido a Função Objetivo e as restrições, deve-se analisar se o interesse é maximizar (no caso de lucro) ou minimizar (no caso de despesas/custos). Definido isso, as técnicas de PL maximizaram ou minimizaram a função objetivo. Tais conceitos foram amplamente explicados por Taha (2008).

Visto que no mundo empresarial tem-se várias variáveis que entram na parte de custos do modelo (que podem variar de acordo com o destino de entrega do produto) a única maneira de maximizar os lucros é com técnicas de programação linear, mas como nesse trabalho o único custo é o de compra, a equação final do modelo foi de segundo grau e a otimização foi feita por meio das coordenadas do vértice da parábola. Visto que, o valor esperado de β_1 é negativo, devido ao fato dele ser o coeficiente de elasticidade-preço da demanda, não haverá problemas em utilizar tal técnica.

Dada uma equação de segundo grau $y = a * x^2 + b * x + c$, as coordenadas do vértice da parábola são:

$$x_v = \frac{-b}{2*a} \text{ e } y_v = \frac{-(b^2-4*a*c)}{4*a}$$

2.3 LEI GERAL DA DEMANDA

A lei geral da demanda descreve a relação inversa entre o preço de mercado dos bens e a quantidade demandada. A elasticidade – preço da demanda mede a intensidade da variação da quantidade demandada de um bem diante da variação do seu preço (Jorge, 2009).

Definimos o grau de elasticidade de um bem, diante desse grau de intensidade da quantidade demandada, a partir da variação do seu preço. Assim, o bem tem demanda *elástica* quando a quantidade demandada responde substancialmente a variações no preço, e tem demanda inelástica quando a quantidade demandada responde pouco a variações no preço (Boarati, 2006).

Uma consideração deve ser feita com respeito ao sinal do coeficiente de elasticidade. Como a quantidade demandada de um bem tem relação inversa ao preço, a variação percentual da quantidade sempre será negativa e, portanto, terá sinal oposto à variação percentual do preço. É prática bastante comum ignorar-se o sinal de menos e considerar todas as elasticidades como números positivos (ou em valor absoluto) (Milone, 1994).

Como pode ser visto em Varian (2007), pode-se ter:

1. Demanda Elástica (Ed > 1)

Como pode ser visto na figura 1, produtos com a demanda Elástica sofrem uma alteração maior na quantidade vendida em relação ao preço.

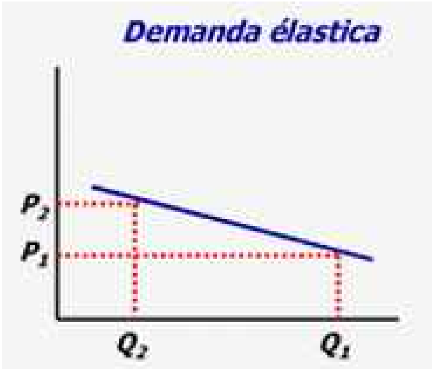

Figura 1 – Demanda Elástica

Fonte: Fato Economia

Quando o resultado do coeficiente de elasticidade da demanda é maior que 1, significa que uma mudança em termos percentuais do preço do bem provoca uma mudança em termos percentuais na quantidade demandada maior que a mudança de preço. O que é estudado por Jorge (2009).

Então, quando tem-se o coeficiente de elasticidade da demanda Ed > 1, consideramos o bem com demanda elástica.

2. Demanda Inelástica (Ed < 1)

Como pode ser visto na figura 2, produtos com a demanda Inelástica sofrem uma alteração menor na quantidade vendida em relação ao preço.

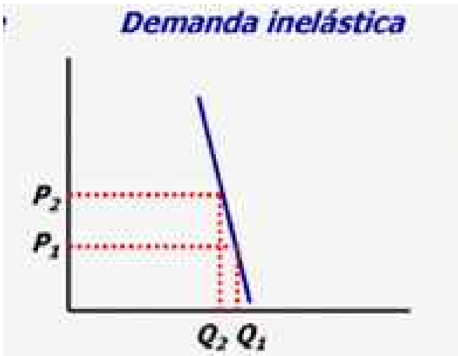

Figura 2 – Demanda Inelástica

Fonte: Fato Economia

Quando o resultado do coeficiente de elasticidade da demanda é menor que 1, significa que uma mudança em termos percentuais do preço do bem provoca uma mudança em termos percentuais na quantidade demandada menor que a mudança de preço.

Então, quando tem-se o coeficiente de elasticidade da demanda Ed < 1, consideramos o bem com demanda inelástica.

3. Demanda com Elasticidade Unitária (Ed =1)

Como pode ser visto na figura 3, produtos com a demanda com Elasticidade Unitária sofrem igual alteração na quantidade vendida em relação ao preço.

Figura 3 – Demanda com Elasticidade Unitária

Fonte: Fato Economia

Quando o coeficiente de elasticidade da demanda é igual a 1, significa que uma mudança em termos percentuais do preço do bem provoca uma mudança em termos percentuais na quantidade demandada igual à mudança de preço.

Então, quando tem-se o coeficiente de elasticidade da demanda *Ed = 1*, consideramos o bem com demanda com elasticidade unitária.

3. METODOLOGIA

Para determinar a equação que associa o preço com a quantidade vendida, será utilizado os conceitos de regressão linear.

Ao final da modelagem, o modelo será obtido da seguinte forma:

$$Q = \beta_0 + P * \beta_1$$

em que:

Q: Quantidade vendida do produto

P: Preço de venda do produto

β_0 e β_1: Coeficientes de regressão

Pela definição do parâmetro β_1: “temos que para um aumento de uma unidade na variável x, o valor E(Y|x) aumenta β_1 unidades.” Logo, o entenderemos com o coeficiente de elasticidade- preço da demanda, como consta em Azevedo (1997).

Ao final, o objetivo será maximizar o lucro, que será definido como o valor arrecadado com as vendas menos os custos.

$$L = Q * P - Q * C$$

$$L = Q * (P - C)$$

$$L = (\beta_0 + P * \beta_1) * (P - C)$$

$$L = \beta_1 P^2 + P(\beta_0 - \beta_1 C) - \beta_0 C$$

em que:

L: é o Lucro total obtido com a venda do produto;

C: Custo de compra do produto;

P: Preço de venda do produto;

Q: Quantidade vendida do produto;

β_0 e β_1: Coeficientes de regressão.

Para maximização da função Lucro, será utilizada o método simplex das técnicas de programação linear.

A base de dados utilizada está disponível na internet com o nome NortWind, a qual contém o histórico de preços e quantidades vendidas, diariamente.

O software utilizado para ajustar os modelos foi o Software R (2017), e o nível de significância adotado foi de 5%.

4. RESULTADOS

Na tabela 1, 2 e 3 temos os nomes dos produtos, as estatísticas descritivas do preço e da quantidade vendida, respectivamente, para os produtos 2, 3, 5, 17 e 20. O produto 2 são garrafas esportistas, o item 3 é um xarope, uma das especiarias mais antigas nativas da região do Mediterrâneo, 5 é um tempero, 17 é uma carne de ave e 20 é uma geleia.

Tabela 1 – Nome dos produtos

Produto	Nome
2	Chang
3	Aniseed Syrup
5	Chef Anton's Gumbo Mix
17	Alice Mutton
20	Sir Rodney's Marmalade

Pode notar-se na tabela 2 que os dados têm baixa dispersão (homogêneos), pois apresentam coeficiente de variação menor que 15%.

Tabela 2 – Estatísticas descritivas para o preço

Produto	Média	Mediana	Desvio padrão	Coeficiente de variação (%)	Mínimo	Máximo	Tamanho da amostra
2	17,75	18,80	1,76	9,91	14,95	19	44
3	9,60	10	0,84	8,75	8	10	12
5	19,53	21,17	2,27	11,62	16,80	21,35	10
17	36,41	38,90	3,71	10,19	30,95	39	37
20	75,89	80,95	7,76	10,22	64,55	81	16

Em relação a quantidade vendida do produto, observa-se pela tabela 3 que os dados têm alta dispersão (heterogêneos), pois apresentam coeficiente de variação maior que 30%.

Tabela 3 – Estatísticas descritivas para a quantidade vendida

Produto	Média	Mediana	Desvio padrão	Coeficiente de variação (%)	Mínimo	Máximo
2	24,02	20	18,34	76,35	3	100
3	27,33	22,50	17,60	64,40	4	60
5	29,80	25	21,74	72,95	4	70
17	24,43	20	21,45	87,80	2	100
20	19,56	17,50	13,83	70,70	1	50

Na tabela 4 temos os valores p para os testes de Normalidade (Shapiro Wilk), Homogeneidade (Breusch-Godfrey) e independência (Durbin-Watson). Observa-se que todos os produtos atenderam as pressuposições da regressão, ou seja, os resíduos seguem distribuição normal com média e variância constante e são independentes.

Tabela 4 – Valores p para os testes de adequação do modelo

Produto	Shapiro Wilk	Breusch-Godfrey	Durbin-Watson
2	0,0900	0,7500	0,4500
3	0,8800	0,1100	0,6900
5	0,2100	0,1700	0,7900
17	0,1116	0,6073	0,6296
20	0,5141	0,3961	0,5262

Na tabela 5, encontram-se os valores do intercepto, coeficiente angular e do coeficiente de determinação (R^2). Nota-se que, como o esperado, os coeficientes angulares são negativos. Estes baixos valores de R^2 é explicado baixos coeficientes de variação do preço (Tabela 2) e altos coeficientes de variação da quantidade vendida (tabela 3). O fato do R^2 ser baixo implica que a reta não está muito bem ajustada aos dados, embora as pressuposições do modelo foram atingidas.

Tabela 5 – Informações sobre os modelos de regressão

Produto	Intercepto	Coeficiente angular	R^2
2	61,69	-2,14	0,2098
3	54,85	-3,17	0,1506
5	60,35	-1,65	0,2085
17	89,97	-1,60	0,1790
20	45,45	-0,34	0,053

Na tabela 6 encontram-se os valores do preço ótimo, quantidade vendida (de acordo com o preço ótimo) e lucro obtido nessas condições, encontram-se também os custos de compra dos produtos que foi usado na maximização. Observando juntamente com as tabelas 3 e 4, nota-se que a margem da empresa em relação ao preço ótimo está entre 45% e 53%.

Tabela 6 – Informações da maximização

Produto	Preço ótimo	Quantidade vendida	Lucro	Custos
2	19,33	20,33	193,08	9,83
3	11,27	19,13	115,51	5,23
5	23,68	21,27	274,27	10,79
17	38,15	28,94	523,34	20,06
20	87,72	15,62	717,98	41,77

Juntando as informações da tabela 2 e 6, nota-se que, em média, os produtos são vendidos abaixo do considerado preço ótimos (aquele que traz mais lucro), o que leva a um maior número de quantidades vendidas, mas não ao maior lucro. Na tabela 7, encontram-se os preços de vendas médios e os preços ótimos.

Tabela 7 – Diferenças entre peço ótimo e preço de venda

Produto	Preço médio	Preço ótimo	Diferença
2	17,75	19,33	-1,58
3	9,60	11,27	-1,67
5	19,53	23,68	-4,15
17	36,41	38,15	-1,74
20	75,89	87,72	-11,83

A metodologia é importante para mostrar o valor ótimo de preço de venda do produto e mostrar no geral o quanto a empresa está deixando de ganhar.

5. CONCLUSÃO

Conclui-se que a técnica de regressão linear simples é adequada para relacionar preço e quantidade vendida de um determinado produto. Também pode-se concluir que, no caso deste trabalho onde os custos são fixos, a maximização pode ser feita por meio das coordenadas do vértice da parábola. Neste trabalho foi possível concluir que a empresa não atinge o lucro máximo para os produtos avaliados.

6. REFERÊNCIAS

AZEVEDO, P. R. M. **Modelos de regressão linear**. Saber & Ciência, 1997.

BERTSIMAS, D., TSITSIKLIS, J.N., **Introduction to Linear Optimization**. Athena Scientific, 1997.

BOARATI, VANESSA. **Economia para o direito**. Barueri: Manole, 2006.

FONTE ECONOMIA. Disponível em: http://fateconomia2013.blogspot.com.br/2013/03/grupo-2-introducao-elasticidade-da.html. Acesso em: 21/12/2017 as 08:06.

FREIRE, C. A. L. et. al. **Análise de modelos de regressão linear com aplicações**. Campinas: Ed. da UNICAMP, 1999.

MILONE, PAULO CÉSAR; LAGE, BEATRIZ HELENA GELAS. **Propaganda e economia para todos**. São Paulo: Summus Editorial, 1994.

MONTGOMERY, DOUGLAS C., PECK, ELIZABETH A. **Introduction to Linear Regression Analysis**, 2nd ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1992.

JORGE, F. T. J. **Economia: Notas introdutórias**. 2. ed. Atlas S A, 2009.

SANTOS, R. V. dos. **Planejamento do Preço de Venda. Caderno de Estudos**, FIPECAFI, v.9, n.15, p.60 – 74, São Paulo; janeiro/junho 1997.

TAHA, H. A**. Pesquisa operacional**. 8. ed. Prentice Hall, 2008.

VARIAN, HAL R. **Microeconomia. Conceitos básicos**. 7 ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.